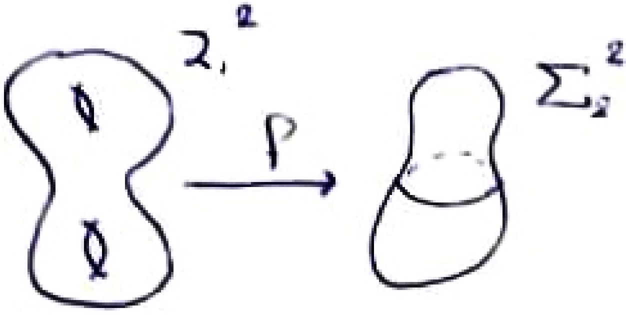
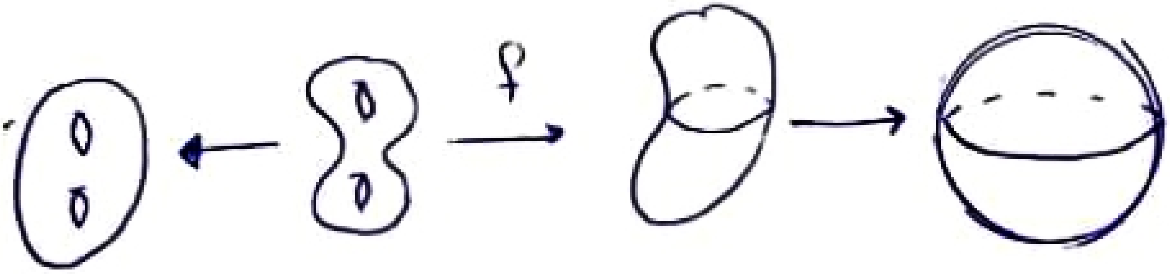
§ Περιεχόμενα

1. πολυπτύγματα



2. Διανυσματικά πεδία σε αυτούς τους χώρους

3. Πως αυτές οι έννοιες μπορεί να μας βοηθήσουν να ταξινομήσουμε τέτοιους χώρους



§1 - Επανάληψη σε έννοιες του Απειροστικού Λογισμού

1.1 Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$

Εφοδιάζουμε τον $\mathbb{R}^n$ με δομή διανυσματικού χώρου

Επιπλέον, εφοδιάζουμε τον $\mathbb{R}^n$ με εσωτερικό γινόμενο

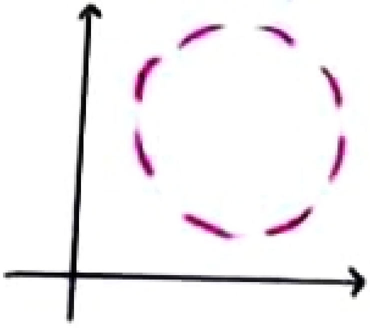
$\langle x,y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$

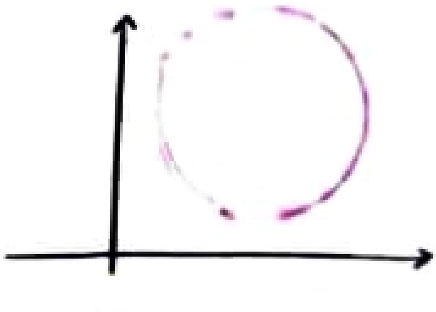
$y = (y_1, \dots, y_n)$

- Μέσω του $\langle \, , \, \rangle$ ορίζουμε απόσταση σημείων. Συγκεκριμένα, $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$

- Συμβολίζουμε με $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$ (ανοιχτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$)

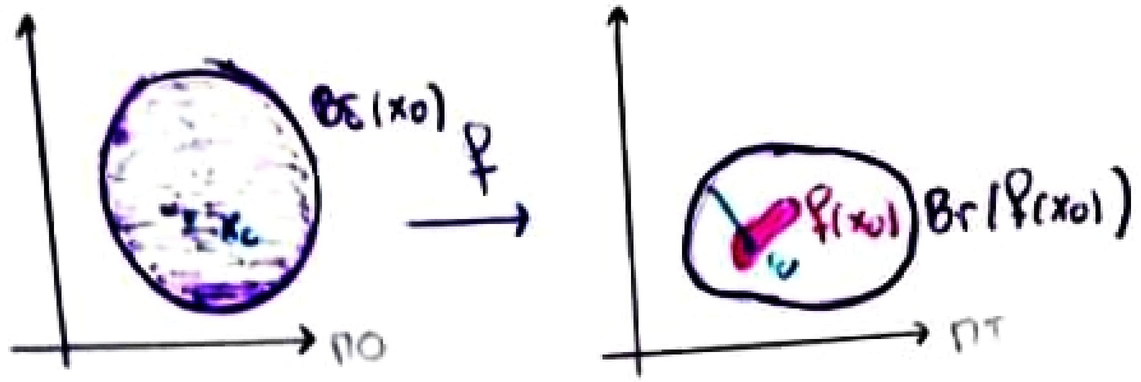


Συμβολίζουμε με $\overline{B_r}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$ (κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^n$)



ΟΡΙΣΜΟΣ

Εστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό υποσύνολο και $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια απεικόνιση. Η f λεγεται συνεχής **στο** $x_0 \in U$ όταν

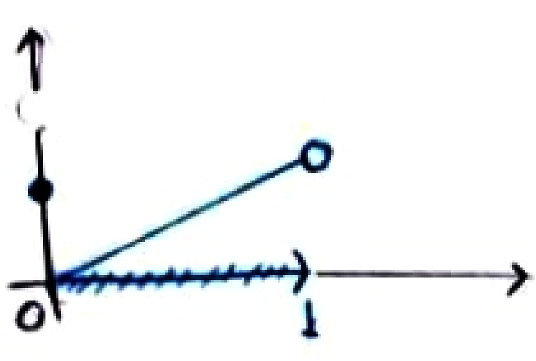


Δοθεντος $\varepsilon > 0$, $\exists$ $\delta > 0$ τ.ω $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$

Ε.λ.δ $\|x - x_0\| < \delta \to \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Πολλες φορες θα εχουμε απεικονισεις που ορίζονται σε τυχαία συνολα (δεν είναι αναγκαστικα ανοιχτά)



Τι κάνουμε σε τέτοια σύνολα;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εστω A τυχαιο υποσυνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια απεικονιση. Η f θα λεγεται συνεχής... του A αν $\exists$ ανοικτό U που περιέχει το A και επέκταση $\tilde{f}$ της f του U που να είναι συνεχής

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ενα υποσυνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ λεγεται ανοικτό όταν έχει την εξής ιδιότητα.

$$\forall x \in U, \exists B_r(x) \text{ ώστε } B_r(x) \subset U$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το υποσυνολο U λεγεται κλειστό αν $U^c = \mathbb{R}^n \setminus U$ ειναι ανοικτό

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ας υποθεσουμε ότι $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n$ Τοτε συμβαινει ακριβως μια απο τις παρακατω τρεις δυνατότητες

1η περιπτωση

$\exists B_r(x)$ που να περιέχεται στο A (Εσωτερικό σημείο)

2η περιπτωση

$\exists B_r(x)$ που δεν περιέχεται στο A (Εξωτερικό σημείο)

3η περιπτωση

$\forall B_r(x)$ με κεντρο το x, $\exists$ σημεια της $B_r(x)$ εντός του A και εκτός του A (Συνοριακό σημείο)

§ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια απεικόνιση
Η f θα λέγεται διαφορίσιμη στο σημείο $x_0 \in U$ όταν

$\mathbb{R}$: $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$ Θέλω να τον τροποποιήσω για να ισχύει στις πολλές διαστάσεις

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \overbrace{\boxed{f'(x_0)(x - x_0)}}^{a(x-x_0)}}{x - x_0} = 0$$

όπου $a(x - x_0)$ γραμμική απεικόνιση

Επομένως, όταν $\exists$ γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ε.ω.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

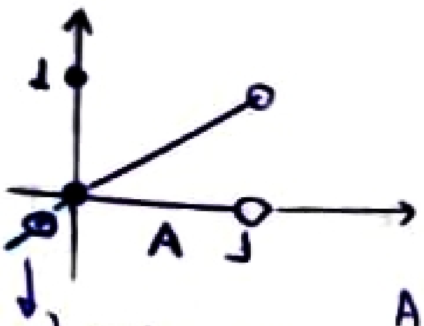
ΕΡΩΤΗΜΑ

$\exists$ κάποιος εύκολος/πρακτικός/χρήσιμος τρόπος να βρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό; Πως βρίσκουμε τον πίνακα T;

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

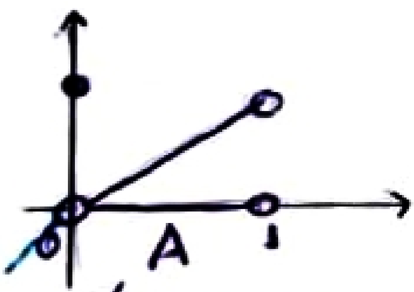
Ο γραμμικός μετασχηματισμός T λέγεται διαφορικό της f στο σημείο x_0 και συμβολίζεται με

$$df_{x_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$



$\exists$ επέκταση

$A=[0,1)$



$\nexists$ επέκταση

ΕΡΩΤΗΜΑ

Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \kappa \\ a_{21}x + a_{22}y = \lambda \end{cases} \quad (1)$$

και το μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} f(x,y) = \kappa \\ g(x,y) = \lambda \end{cases} \quad (2)$$

Πότε αυτά τα δύο συστήματα μπορώ να τα λύσω ως προς x και y;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το 1ο σύστημα έχει λύση όταν $\det \neq 0$.

Το 2ο σύστημα: Κριτήριο αντιστροφής συνάρτησης. Παίρνουμε την Jacobiανή ορίζουσα και αν είναι μη μηδενική στο σημείο που να μας ενδιαφέρει έχει λύση.

Η διαφορά της άλγεβρας με την ανάλυση είναι ότι η άλγεβρα μας λέει ποια είναι η λύση, ενώ η ανάλυση μας λέει αν έχει λύση, όχι ποια είναι.

Ας περιοριστούμε σε συναρτήσεις $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Έστω ότι $p \in U$ (σημείο) και v ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο p. Θεωρώ την ευθεία που διέρχεται από το p με εφαπτομένη το διάνυσμα v. Έχουμε $\varepsilon(t) = p + tv$

Επειδή, το U είναι ανοιχτό, για μικρές τιμές του t η $\varepsilon(t) \in U$.

Ας περιορίσουμε την f στην $\varepsilon(t)$. Έτσι, έχουμε

$(f\circ\varepsilon)(t) = f(\varepsilon(t)) = f(p+tv)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Στην περίπτωση που το όριο

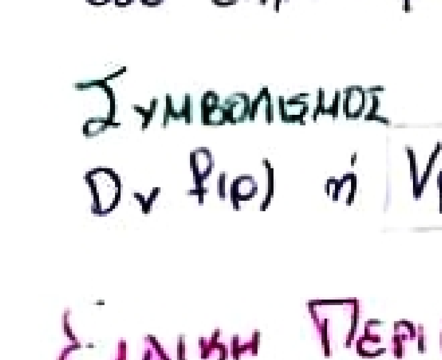
$$(f\circ\varepsilon)'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t}$$

$\exists$, το αποτέλεσμα λέγεται (μερική) παράγωγος της f στο σημείο p κατά τη διεύθυνση v.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

$D_v f(p)$ ή $V_p(f)$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ



Όταν ως κατευθύνσεις επιλέγω τα $e_i = (0,\dots,0,\underset{\uparrow\, i\text{-θέση}}{1},0,\dots,0)$

παίρνουμε τις μερικές παραγώγους

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+te_i)-f(p)}{t} = (e_i)_p(f)$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε στην περίπτωση που υπάρχουν μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ λέγεται C^k-τάξεως αν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και κ-τάξης. Αντίστοιχα, όταν έχουμε $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, λέμε ότι η f είναι C^k-τάξης αν-ν κάθε συνιστώσα f_i είναι C^k-τάξης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ας υποθέσουμε ότι $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ είναι C^k-τάξης με $k \geq 1$. Τότε ο πίνακας του διαφορικού (η f είναι διαφορίσιμη) είναι

$$df_p U = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Επιπλέον, $$\partial f_p \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix}$$

Ορισμός

Όταν $n=m$ η ορίζουσα $J_f(p) = \det df_p$ λέγεται Ιακωβιανή ορίζουσα.

Στην περίπτωση που $m=1$, δηλ. όταν έχ. $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, το διάνυσμα $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ ονομάζεται κλίση.

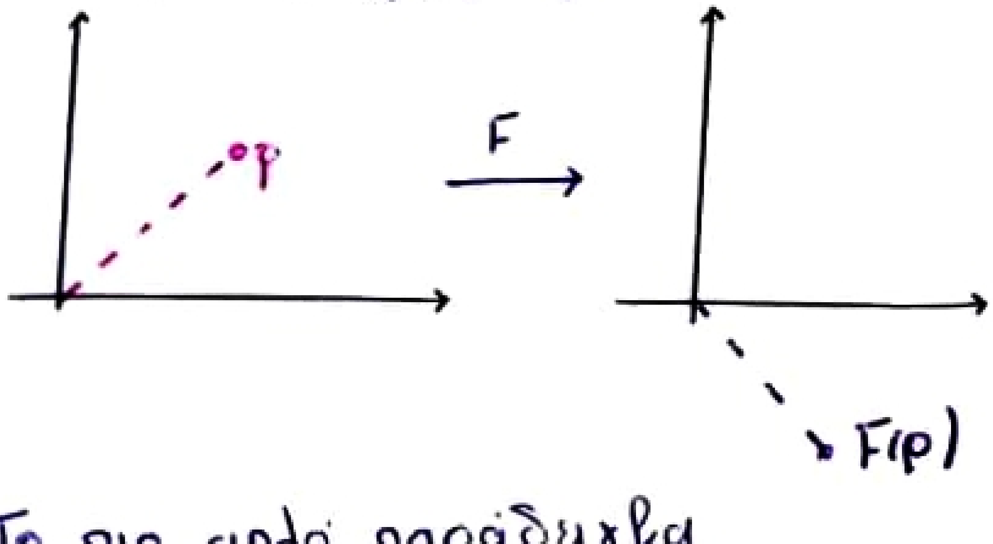
§ Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού

• **Μετασχηματισμοί**

Ας μελετήσουμε διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ ισοδιάστατων ευκλείδειων χώρων $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Για ευκολία ας περιοριστούμε στη διάσταση 2.
$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Τέτοιες απεικονίσεις έχουν τη μορφή
$F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$



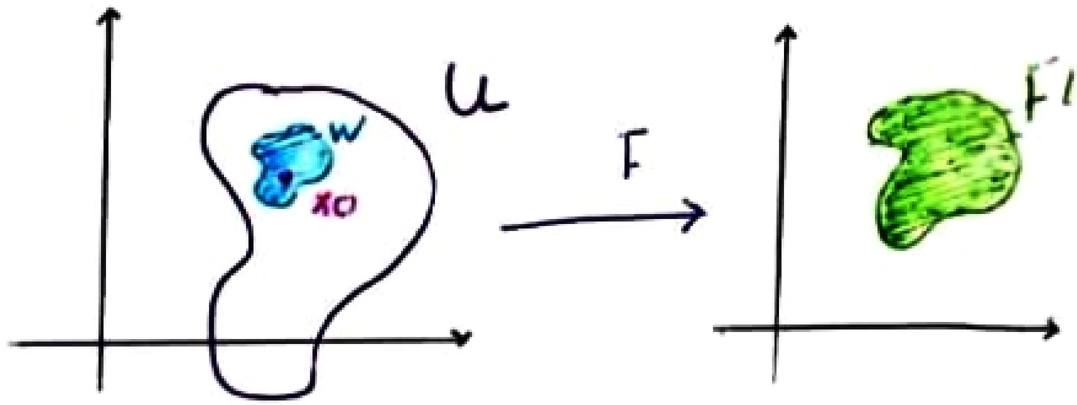
Το πιο απλό παράδειγμα
$F(x,y) = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$ είναι οι γραμμικές.

Ερωτημα

Ποτε εχει λυση το συστημα $F(x,y)=(\xi,\eta)$ ως προς x και y, ή ισοδυναμα, ποτε εχει λυση ως προς x, y το συστημα
$$\begin{cases} f(x,y)=\xi \\ g(x,y)=\eta \end{cases},$$

Θεωρημα Αντιστροφης Συναρτησης

Εστω $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια C^k-ταξεως απεικονιση με $k \geq 1$, ορισμενη στο ανοιχτό U. Εαν $\exists$ σημειο $x_0 \in U$



ωστε $J_F(x_0) = \det dF_{x_0} \neq 0$, τότε $\exists$ ανοικτό $W \subseteq U$ που περιεχει το x_0 με τις εξής ιδιότητες:

α) Ο περιορισμός της F στο W είναι 1-1.

β) Το σύνολο $F(W)$ είναι ανοιχτό.

γ) Η αντίστροφη $F^{-1}: F(W) \to W$ είναι C^k-ταξεως

δ) Στο σημείο $y = F(x)$ ισχύει ότι $dF^{-1}_y = (dF_x)^{-1}$

* Αν οι διαστάσεις <u>ΔΕΝ</u> είναι ίδιες τότε <u>ΔΕΝ</u> ισχύει το 1-1.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το παραπάνω Θεώρημα έχει τοπικό χαρακτήρα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$F(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)\ (=e^z)$

$$dF_{(x,y)}=\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix}$$

$J_{F(x,y)}=$

$$\det dF_{(x,y)}=e^{2x}\cos^2 y+e^{2x}\sin^2 y=e^{2x}>0$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα, όπου και να πάω θα βρω αντιστροφή. Ισχύει στο $\underset{(\text{γενικά})}{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2}$; 1-1 δεν είναι, άρα δεν αντιστρέφεται $(F(1,0)=F(1,2\pi))$

ΔΛΔ $\begin{cases} e^x\cos y=\lambda \\ e^x\sin y=\mu \end{cases}$ Αυτό δεν έχει λύση σε όλο το $\mathbb{R}^2$ καθώς δεν είναι 1-1.

Αλλά, τοπικά μπορώ να βρω μια περιοχή που να ισχύει και να αντιστρέφεται.